(Ova stranica je ostavljena prazna)

PRIMENE INTEGRALA

§ 1. Neki zadaci iz geometrije i statike

Površina ravne figure

2455. Izračunati površinu ograničenu linijama $y^2=2x+1$ i $x-y-1=0$.

2456. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y=-x^2+4x-3$ i njenim tangentama u tačkama (0; 3) i (3; 0).

2457. Izračunati površinu ograničenu parabolom $y^2=2px$ i njenom normalom koja sa x-osom zaklapa ugao od 135°.

2458. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y=x^2$ i $y=\sqrt{x}$.

2459. Izračunati površinu ograničenu parabolama $y^2+8x+16$ i $y^2-24x=48$.

2460. Izračunati povɹšinu ograničenu parabolama $y=x^2$ i $y=\frac{x^3}{3}$.

2461. Parabola $y=\frac{x^2}{2}$ deli krug $x^2+y^2=8$ na dva dela; naći površinu svakog od njih.

2462. Parabola $y^2=6x$ deli krug $x^2+y^2=16$ na dva dela; naći njihove površine.

2463. Iz kruga poluprečnika a isečena je elipsa čija je velika osa jednaka jednom od prečnika kruga, a manja osa je $2b$. Dokazati da je površina preostalog dela kruga jednaka površini elipse čije su poluose a i $a-b$.

2464. Naći površinu ograničenu lukom hiperbole i njenom tetivom koja prolazi kroz žižu i normalna je na realnu osu.

2465. Hiperbola $x^2-2y^2=\frac{a^2}{4}$ deli krug $x^2+y^2=a^2$ na tri dela; naći površinu svakog od njih.

2466. Hiperbola $\frac{x^2}{2}-y^2+1$ deli oblast ograničenu elipsom $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ na tri dela: izračunati njihove površine.

2467. Izračunati površinu ograničenu krivama $y=\frac{1}{1+x^2}$ i $y=\frac{x^2}{2}$.

2468. Izračunati površinu ograničenu krivom $y=x(x-1)^2$ i apscisnom osom.

2469. Naći površinu ograničenu krivom $x=y^2(y-1)$ i ordinatnom osom.

2470. Krive zadate jednačinama $y^m=x^n$ i $y^n=x^m$ u kojima su m i n celi pozitivni brojevi, ograničavaju jednu ili više (zatvorenih) oblasti. Izračunati površinu one od njih koja leži u prvom kvadrantu, a zatim i ukupnu površinu ograničenu ovim linijama vodeći računa o parnosti i neparnosti brojeva m i n.

2471. a) Izračunati površinu ograničenu krivom $y=x-x^2\sqrt{x}$ i x-osom. b) Izračunati površinu ograničenu dvema granama krive $(y-x)^2=x^5$ i pravom $x=4$.

2472. Izračunati površinu oblasti ograničene krivom $(y-x-2)^2=9x$ i koordinatnim osama.

2473. Izračunati površinu ograničenu petljom krive $y^2=x(x-1)^2$.

2474. Izračunati površinu ograničenu zatvorenom krivom $y^2=(1-x^2)^3$.

2475. Izračunati površinu ograničenu zatvorenom krivom $y^2=x^2-x^4$.

2476. Izračunati površinu ograničenu zatvorenom krivom $x^4-ax^3+a^2y^2=0$.

2477. Izračunati površinu konačne oblasti ograničene krivom $x^2y^2=4(x-1)$ i pravom koja prolazi kroz njene prevojne tačke.

2478. Izračunati površinu ograničenu krivama $y=e^x$, $y=e^{-x}$ i pravom $x=1$.

2479. Izračunati površinu konačne oblasti ograničene krivom $y=(x^2+2x)e^{-x}$ i x-osom.

2480. Izračunati površinu ograničenu krivom $y=e^{-x}(x^2+3x+1)+e^2$, x-osom i dvema pravama, paralelnim y-osi, koje prolaze kroz tačke ekstremuma funkcije y.

2481. Naći površinu konačne oblasti ograničene krivama $y=2x^2e^x$ i $y=-x^3e$.

2482. a) Izračunati površinu ograničenu krivom $y=\ln x$, pravama $x=a$ i $x=b$ i odgovarajućim odsečkom na x-osi.

b) Izračunati površinu ograničenn krivom $y=\ln x$, ordinatnom osom i pravama $y=\ln a$ i $y=\ln b$.

2483. Izračunati površinu ograničenu krivama $y=\ln x$ i $y=\ln^2 x$.

2484. Izračunati površinu ograničenu krivama $y=\frac{\ln x}{4x}$ i $y=x\ln x$.

2485. Izračunati površinu jedne od oblasti ograničenih apscisnom osom i krivama $y=\sin x$ i $y=\cos x$.

2486. Izračunati površinu ograničenu ordinatnom osom i krivama $y=\operatorname{tg} x$ i $y=\frac{2}{3}\cos x$.

2487. Naći površinu oblasti ograničene krivom $y=\sin^3 x+\cos^3 x$ i odsečkom x-ose između dve uzastopne presečne tačke krive sa x-osom.

2488. Izračunati površinu ograničenu apscisnom osom, i krivama $y=\arcsin x$ i $y=\arccos x$.

2489. Izračunati površinu ograničenu zatvorenom krivom $(y-\arcsin x)^2=x-x^2$.

2490. Naći površinu oblasti između jednog svoda cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ i x-ose.

2491. Izračunati površinu ograničenu astroidom $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$.

2492. Izračunati površinu figure ograničene kardioidom $x=2a\cos t-a\cos 2t$, $y=2a\sin t-a\sin 2t$.

2493. Izračunati površinu ograničenu: 1) epicikloidom

$$x=(R+r)\cos t-r\cos\frac{R+r}{r}t,\quad y=(R+r)\sin t-r\sin\frac{R+r}{r}t;$$

2) hipocikloidom

$$x=(R-r)\cos t+r\cos\frac{R-r}{r}t,\quad y=(R-r)\sin t-r\sin\frac{R-r}{r}t,$$

pri čemu je $R=nr$ (n je ceo broj); ovde je: R — poluprečnik nepomičnog kruga čiji se centar poklapa sa koordinatnim početkom, r — poluprečnik pokretnog kruga, a t — ugao za koji se obrne poluprečnik nepomičnog kruga povučen iz tačke dodira.

2494. Naći površinu ograničenu petljom krive: 1) $x=3t^2$, $y=3t-t^3$; 2) $x=t^2-1$, $y=t^3+t$.

2495. a) Naći površinu koju prebriše poteg tačke Arhimedove spirale $\rho=a\varphi$ u toku jednog punog obrta, uzimajući da početnom položaju potega odgovara $\varphi=0$.

b) Izračunati površinu ograničenu drugim i trećim zavojem spirale i polarnom osom.

2496. Naći površinu ograničenu krivom $\rho=a\sin 2\varphi$.

2497. Naći površinu ograničenu krivom $\rho=a\cos 5\varphi$.

2498. Naći površinu ograničenu Paskalovim pužem $\rho=2a(2+\cos\varphi)$.

2499. Naći površinu ograničenu krivom $\rho=a\,\mathrm{tg}\,\varphi$ $(a>0)$ i pravom $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

2500. Svaka od krivih $\rho=3+\cos 4\varphi$ i $\rho=2-\cos 4\varphi$ ograničava po jednu oblast; naći površinu zajedničkog dela ovih oblasti.

2501. Deo oblasti ograničen krivom $\rho=2+\cos 2\varphi$ leži izvan krive $\rho=2+\sin\varphi$; naći njegovu površinu.

2502. Naći površinu ograničenu krivom $\rho^2 = a^2 \cos n\varphi$ (n je pozitivan broj).

2503. Pokazati da je površina ograničena proizvoljnim lukom hiperbolične spirale $\rho\varphi = a$ i potezima njegovih krajnjih tačaka proporcionalna razlici tih potegâ.

2504. Pokazati da je površina ograničena proizvoljnim lukom logaritamske spirale $\rho = ae^{m\varphi}$ i potezima njegovih krajnjih tačaka proporcionalna razlici kvadrata tih potegâ.

2505*. Naći površinu oblasti koja leži između unutarnje i spoljne petlje krive $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$.

2506. Izračunati površinu ograničenu krivom

$$\rho = \sqrt{1-t^2}, \quad \varphi = \arcsin t + \sqrt{1-t^2}.$$

U zadacima 2507—2511 zgodno je preći na polarne koordinate.

2507. Naći površinu ograničenu Bernulijevom lemniskatom

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2).$$

2508. Naći površinu onog dela oblasti ograničene Bernulijevom lemniskatom (vidi zad. 2507), koji leži unutar kruga $x^2 + y^2 + \frac{a^2}{2}$.

2509. Naći površinu ograničenu krivom $(x^2 + y^2)^2 - a^2 x^2 - b^2 y^2 = 0$. („Pođera elipse“).

2510. Naći površinu ograničenu krivom $(x^2 + y^2)^3 = 4 a^2 xy (x^2 - y^2)$.

2511. Izračunati površinu ograničenu krivom $x^4 + y^4 = x^2 + y^2$.

2512. Izračunati površinu oblasti koja leži između krive $y = \frac{1}{1 + x^2}$ i njene asimptote.

2513. Naći površinu koja leži između krive $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$ i njene asimptote.

2514. Naći površinu koja leži između cisoide $y^2 = \frac{x^3}{2a - x}$ i njene asimptote.

2515. Naći površinu koja leži između krive $xy^2 = 8 - 4x$ i njene asimptote.

2516*. 1) Izračunati površinu ograničenu krivom $y = x^2 e^{-x^2}$ i njenom asimptotom.

2) Izračunati površinu ograničenu krivom $y^2 = xe^{-2x}$.

2517. Izračunati površinu između traktrise $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ i apscisne ose.

2518. Data je kriva $\rho = \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi}$; izračunati površinu ograničenu njenom petljom, i onu koja leži između krive i njene asimptote.

Dužina luka krive*).

2519. Izračunati dužinu luka lančanice $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$ (od $x_1 = 0$ do $x_2 = b$).

2520. Izračunati dužinu luka parabole $y^2 = 2px$ od temena do tačke $M(x, y)$. (Za nezavisno promenljivu uzeti y.)

2521. Naći dužinu luka krive $y = \ln x$ (od $x_1 = \sqrt{3}$ do $x_2 = \sqrt{8}$).

2522. Naći dužinu luka krive $y = \ln(1 - x^2)$ $\left(\text{od } x_1 = 0 \text{ do } x_2 = \frac{1}{2}\right)$.

2523. Naći dužinu luka krive $y = \ln \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ (od $x_1 = a$ do $x_2 = b$).

2524. Izračunati dužinu onog dela semikubne parabole $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, koji leži unutar parabole $y^2 = \frac{x}{3}$.

2525. Izračunati dužinu onog dela semikubne parabole $5y^3 = x^2$, koji leži unutar kruga $x^2 + y^2 = 6$.

2526. Izračunati dužinu petlje krive $9ay^2 = x(x - 3a)^2$.

2527. Naći obim jednog od krivolinijskih trouglova koji obrazuju apscisna osa i krive $y = \ln \cos x$ i $y = \ln \sin x$.

2528. Naći dužinu luka krive $y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}$, između njene najniže tačke i temena (teme je tačka na krivoj u kojoj krivina krive dostiže ekstremnu vrednost).

2529. Naći dužinu krive $y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

2530. Naći dužinu krive $(y - \arcsin x)^2 = 1 - x^2$.

2531. Na cikloidi $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ naći tačku koja deli dužinu prvog svoda cikloide u odnosu $1:3$).

2532. Tačke $A(R, 0)$ i $B(0, R)$ leže na astroidi $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$; odrediti na njoj tačku M koja deli dužinu luka $\overset{\frown}{AB}$ u odnosu $1:3$.

2533*. Naći dužinu luka krive

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

2534. Naći dužinu luka krive $x = a\cos^5 t$, $y = a\sin^5 t$.

2535. Naći dužinu luka traktrise $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ od njene tačke $(0, a)$ do njene tačke (x, y).

2536. Naći dužinu luka evolvente kruga

$$x=R(\cos t+t\sin t), \quad y=R(\sin t-t\cos t).$$

(od $t_1=0$ do $t_2=\pi$).

2537. Izračunati dužinu luka krive

$$x=(t^2-2)\sin t+2t\cos t, \quad y=(2-t^2)\cos t+2t\sin t.$$

(od $t_1=0$ do $t_2=\pi$).

2538. Naći dužinu petlje krive $x=t^2$, $y=t-\frac{t^3}{3}$.

2539. Po krugu poluprečnika a, spolja i iznutra, kotrljaju se (bez klizanja) istim ugaonim brzinama dva kruga jednakih poluprečnika b. U trenutku $t=0$ oni svojim tačkama M_1 i M_2 dodiruju nepomični krug u tački M. Pokazati da dužina puteva koje pređu tačke M_1 i M_2 za proizvoljni interval vremena t, stoje u stalnom odnosu čija je vrednost $\frac{a+b}{a-b}$ (vidi zadatak 2493).

2540. Dokazati da dužina onog dela krive $x=f''(t)\cos t+f'(t)\sin t$, $y=-f''(t)\sin t+f'(t)\cos t$, koji odgovara intervalu (t_1, t_2), iznosi

$$[f(t)+f''(t)]\Big|_{t_1}^{t_2}.$$

2541. Primeniti rezultat prethodnog zadatka na izračunavanje dužine luka krive $x=e^t(\cos t-\sin t$, $y=e^t(\cos t-\sin t)$ od $t_1=0$ do $t_2=t$).

2542. Dokazati da luci krivih

$$x=f(t)-\varphi'(t), \quad y=\varphi(t)+f'(t)$$

i

$$x=f'(t)\sin t-\varphi'(t)\cos t, \quad y=f'(t)\cos t+\varphi'(t)\sin t$$

koji odgovaraju jednom istom intervalu parametra t, imaju jednake dužine.

2543. Naći dužinu luka Arhimedove spirale $\rho=a\varphi$ od početne do završne tačke prvog zavoja.

2544. Dokazati da luk parabole $y=\frac{1}{2p}x^2$ koji odgovara intervalu $0\leqslant x\leqslant a$, ima istu dužinu kao i luk spirale $\rho=p\varphi$ koji odgovara intervalu $0\leqslant\rho\leqslant a$.

2545. Izračunati dužinu luka hiperbolične spirale $\rho\varphi=1$ $\left(\text{od } \varphi_1=\frac{3}{4} \text{ do } \varphi_2=\frac{4}{3}\right)$.

2546. Naći dužinu kardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

2547. Naći dužinu krive $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$ (vidi zad. 2505).

2548. Dokazati da je dužina krive $\rho=a\sin^m\frac{\varphi}{m}$ (m je ceo broj) samerljiva sa a ako je m paran broj, a samerljiva sa dužinom kruga poluprečnika a ako je m neparan broj.

2549. Za koje se vrednosti izložitelja k $(k \neq 0)$ dužina luka krive $y = ax^k$ može izraziti pomoću elementarnih funkcija? (Pozvati se na Čebiševljevu teoremu o integrabilnosti (u konačnom vidu) diferencijalnog binoma).

2550. Naći dužinu krive zadate jednačinom $y = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{x} \sqrt{\cos x}\, dx$.

2551. Izračunati dužinu luka krive $x = \int\limits_{1}^{t} \frac{\cos z}{z} dz$, $y = \int\limits_{1}^{t} \frac{\sin z}{z} dz$. od koordinatnog početka do najbliže tačke u kojoj je tangenta krive paralelna ordinatnoj osi.

2552. Uveriti se da je dužina luka sinusoide $y = \sin x$ koji odgovara jednom njenom periodu, jednaka dužini elipse čije su poluose $\sqrt{2}$ i 1.

2553. Pokazati da je dužina luka „prikraćene" ili „izdužene" cikloide $x = mt - n \sin t$, $y = m - n \cos t$ (m i n su pozitivni brojevi) u intervalu od $t_1 = 0$ do $t_2 = 2\pi$, jednaka dužini elipse sa poluosama $a = m + n$ i $b = |m - n|$.

2554*. Dokazati da dužina elipse sa poluosama a i b zadovoljava nejednakosti $\pi(a+b) < L < \pi\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}$ (zadatak Johana Bernulija).

Zapremina tela

2555. Izračunati zapreminu tela ograničenog površinom koja nastaje obrtanjem parabole $y^2 = 4x$ oko njene ose (obrtni paraboloid), i ravni normalnom na tu osu, postavljenom na odstojanju 1 od temena parabole.

2556. Elipsa čija je velika osa $2a$, a mala $2b$ obrće se: a) oko velike ose, b) oko male ose; naći zapremine dobijenih obrtnih elipsoida. Kao specijalan slučaj izvesti otuda obrazac za zapreminu lopte.

2557. Simetričan parabolični segment čija je osnovica a i visina h, obrće se oko osnovice; izračunati zapreminu tako nastalog obrtnog tela (Kavaljerijev „limun").

2558. Figura koju obrazuju hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$ i prava $x = a + h$ $(h > 0)$ obrće se oko apscisne ose; naći zapreminu obrtnog tela.

2559. Figura koju obrazuju kriva $y = xe^x$, prava $x = 1$ i x-osa obrće se oko x-ose; naći zapreminu tako nastalog obrtnog tela.

2560. Lančanica $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ se obrće oko apscisne ose i obrazuje površinu koja se naziva k a t e n o i d; naći zapreminu tela ograničenog katenoidom i dvema ravnima normalnim na apscisnu osu i udaljenim od koordinatnog početka za a i b jedinica.

2561. Figura koju obrazuju luci parabola $y = x^2$ i $y^2 = x$ obrće se oko apscisne ose; izračunati zapreminu tako nastalog obrtnog tela.

2562. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem petlje krive $(x-4)y^2 = x(x-3)$ oko apscisne ose.

2563. „Krivolinijski trapez", sa osnovicom [0, 1], ograničen lukom krive $y = \arcsin x$, obrće se oko x-ose; naći zapreminu tako nastalog tela.

2564. Segment parabole $y = 2x - x^2$, čija je osnovica [0, 2], obrće se oko ordinatne ose; izračunati zapreminu tako nastalog tela.

2565. Figura koju obrazuju luk krive $y = \sin x$ i odsečak $[0, \pi]$ apscisne ose, obrće se oko ordinatne ose; naći zapreminu tako nastalog tela.

2566. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem leminskate $(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2)$ oko apscisne ose.

2567. Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem krive: 1) $x^4 + y^4 = a^2 x^2$; 2) $x^4 + y^4 = x^3$.

2568. Jedan svod cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ obrće se oko svoje tetive; izračunati zapreminu tako nastalog tela.

2569. Svod cikloide (vidi prethodni zadatak) zajedno sa svojom tetivom obrće se oko svoje ose simetrije; naći zapreminu tako nastalog tela.

2570. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem astroide $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ oko svoje ose simetrije.

2571. Deo krive $x = \dfrac{c^2}{a} \cos^3 t$, $y = \dfrac{c^2}{b} \sin^3 t$ (evoluta elipse) koji leži u prvom kvadrantu, zajedno sa odgovarajućim odsečcima koordinatnih osa, obrće se oko apscisne ose; naći zapreminu tako nastalog tela.

2572. Izračunati zapreminu beskrajnog vretena koje nastaje obrtanjem krive $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$ oko svoje asimptote.

2573. Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem krive $y^2 = 2exe^{-2x}$ oko svoje asimptote.

2574*. Figura koju obrazuju kriva $y = e^{-x^2}$ i njena asimptota obrće se jedanput oko apscisne, a drugi put oko ordinatne ose; izračunati zapremine tako dobijenih tela.

2575*. Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem krive $y = x^2 e^{-x^2}$ oko svoje asimptote.

2576. Figura koju obrazuju kriva $y = \dfrac{\sin x}{x}$ i njena asimptota obrće se oko apscisne ose; izračunati zapreminu tako nastalog tela.

2577*. Izračunati zapreminu tela koje nastaje obrtanjem cisoide $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$ $(a > 0)$ oko njene asimptote.

2578. Naći zapreminu tela koje nastaje obrtanjem traktrise $x = a\left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \dfrac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ oko njene asimptote.

2579*. Izračunati zapreminu elipsoida $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

2580. 1) Izračunati zapreminu tela ograničenog eliptičkim paraboloidom $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$ i ravni $z=1$.

2) Naći zapreminu tela ograničenog jednogranim hiperboloidom $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}-z^2=1$ i ravnima $z=-1$ i $z=2$.

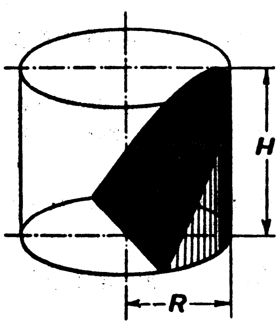
2581. Izračunati zapremine tela ograničenih paraboloidom $z=x^2+2y^2$ i elipsoidom $x^2+2y^2+z^2=6$.

2582. Naći zapremine tela ograničenih površinama dvogranog hiperboloida $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{9}=1$ i elipsoida $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$.

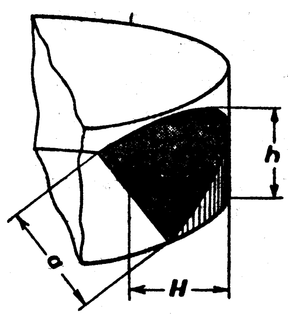
2583. Naći zapreminu tela ograničenog konusnom površinom $(z-2)^2=$ $=\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}$ i ravni $z=0$.

2584. Naći zapreminu tela ograničenog paraboloidom $2z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$ i konusom $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=z^2$.

2585*. Od kružnog cilindra odsečen je jedan deo tako da presečna ravan prolazi kroz prečnik osnove cilindra („cilindrični odsečak", sl. 43); naći zapreminu tog dela u opštem slučaju, i posebno za $R=10\ cm$, $H=6\ cm$.



Sl. 43

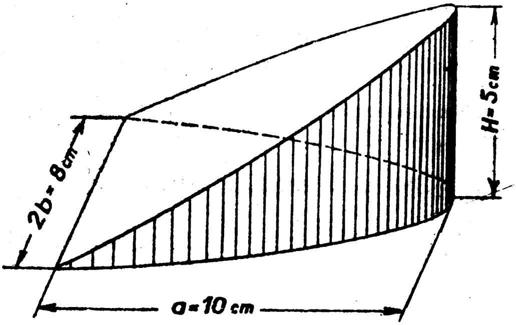


Sl. 44

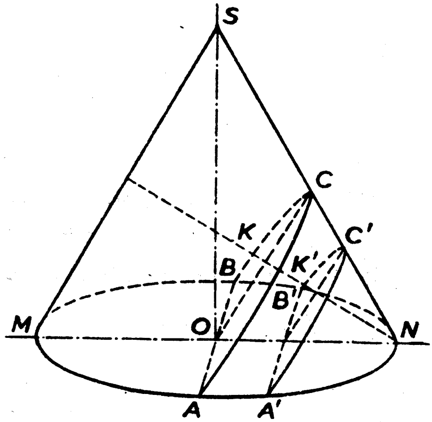
2586. Parabolični cilindar presečen je dvema ravnima od kojih je jedna normalna na izvodnicu; tako obrazovano telo prikazano je na sl. 44. Zajednička osnovica paraboličnih odsečaka je $a=10\ cm$, visina paraboličnog odsečka koji leži u osnovi tela je $H=8\ cm$, a visina samog tela je $h=6\ cm$. Izačunati zapreminu tela.

2587. Eliptični cilindar presečen je tako da presečna ravan prolazi kroz malu osu; izračunati zapreminu odsečenog dela (potrebni numerički podaci o dimenzijama dati su na sl. 45).

2588*. Iznad svih među sobom paralelnih tetiva kruga poluprečnika R konstruisani su parabolični segmenti iste visine H; njihove su ravni normalne na ravan kruga. Izračunati zapreminu tako obrazovanog tela.



Sl. 45

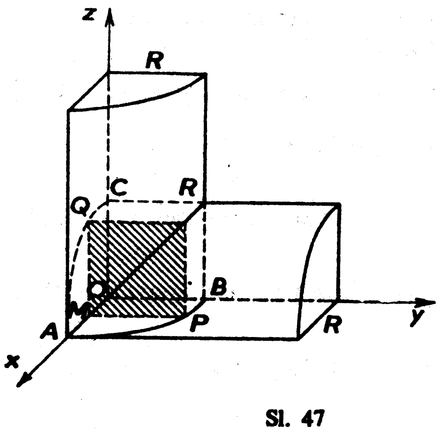


Sl. 46

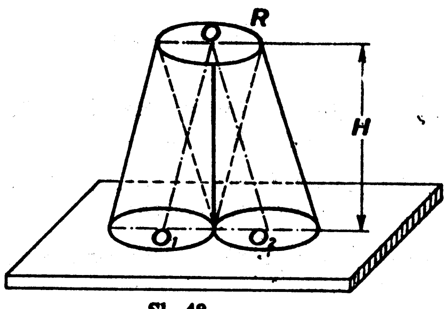
2589*. Prav kružni konus poluprečnika osnove R i visine H presečen je na dva dela tako da presečna ravan prolazi kroz centar osnove i paralelna je jednoj od izvodnica konusa (sl. 46). Naći zapreminu oba dela konusa (Preseci konusa ravnima paralelnim izvodnici su parabolični segmenti).

2590. Centar kvadrata se pomera duž prečnika kruga poluprečnika a tako da ravan kvadrata ostaje normalna na ravan kruga, a dva naspramna temena kvadrata se kreću ostajući stalno na kružnoj liniji; izračunati zapreminu tela koje nastaje takvim kretanjem pomenutog kvadrata.

2591. Krug promenljivog poluprečnika pomera se tako da se jedna njegova tačka kreće po apscisnoj osi, centar mu ostaje stalno na krugu $x^2 + y^2 = r^2$, a njegova ravan ostaje stalno normalna na apscisnoj osi; naći zapreminu tako nastalog tela.



Sl. 47



Sl. 48

2592. Dva istovetna kružna cilindra uzajamno se presecaju tako da im se ose seku pod pravim uglom; naći zapreminu tela koje predstavlja zajednički deo ovih cilindara, čija je 1/8 prikazana na sl. 47 (iskoristiti preseke tela ravnima paralelnim osama oba cilindra).

2593. Dva kosa kružna cilindra imaju istu visinu H i zajedničku gornju osnovu poluprečnika R, a donje im se osnove dodiruju (sl. 48); naći zapreminu zajedničkog dela cilindra.

Površina obrtne površi

2594. Naći površinu površi koja nastaje kad se luk parabole $y^2=4ax$ od njenog temena do tačke sa apscisom $x=3a$, obrće oko apscisne ose.

2595. Izračunati površinu površi koja nastaje obrtanjem parabole trećeg stepena $3y-x^3=0$ oko apscisne ose (od $x_1=0$ do $x_2=a$).

2596. Izračunati površinu katenoida (uporedi i zadatak 2560) koji nastaje obrtanjem lančanice $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$ oko apscisne ose (od $x_1=0$ do $x_2=a$).

2597. Obrtanjem elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ oko velike ose dobija se izduženi obrtni elipsoid, a obrtanjem oko male ose — spljošteni obrtni elipsoid.); naći površinu i jednog i drugog.

2598. Izračunati površinu tela koje nastaje obrtanjem jednog svoda krive $y=\sin x$ oko apscisne ose.

2599. Luk krive $y=\operatorname{tg} x$ od tačke $(0, 0)$ do tačke $\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$ obrće se oko apscisne ose, izračunati površinu tako nastale površi.

2600. Naći površinu tela koje nastaje obrtanjem petlje krive $9ay^2=$ $=x(3a-x)^2$ oko apscisne ose.

2601. Luk kruga $x^2+y^2=a^2$ koji leži u prvom kvadrantu, obrće se oko svoje tetive; izračunati površinu tako nastalog tela.

2602. Naći površinu površi koja nastaje obrtanjem oko x-ose luka krive

$$x=e^t \sin t, \quad y=e^t \cos t \qquad \text{od } t_1=0 \text{ do } t_2=\frac{\pi}{2}$$

2603. Naći površinu tela koje nastaje obrtanjem astroide $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ oko apscisne ose.

2604. Luk cikloide obrće se oko svoje ose simetrije; naći površinu tako nastale površi (vidi zad. 2568).

2605. Naći površinu tela koje nastaje obrtanjem kardioide $\rho=a(1+\cos\varphi)$ oko polarne ose.

2606. Krug $\rho=2r\sin\varphi$ obrće se oko polarne ose; naći površinu tako nastalog tela.

2607 Izračunati površinu tala koje nastaje obrtanjem lemniskate $\rho^2=$ $=a^2\cos 2\varphi$ oko polarne ose.

2608. Beskonačni luk krive $y=e^{-x}$ koji odgovara pozitivnim vrednostima promenljive x, obrće se oko x-ose; naći površinu tako nastale površi.

2609. Naći površinu beskrajnog vretena koje nastaje obrtanjem traktrise $x=a\left(\cos t+\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2}\right)$, $y=a\cdot\sin t$ oko apscisne ose.

Momenti i težište*)

2610. Izračunati statički momenat pravougaonika osnovice a i visine h u odnosu na osnovicu.

2611. Izračunati statički momenat jednakokrako-pravouglog trougla, čije su katete a, u odnosu na svaku od njegovih stranica.

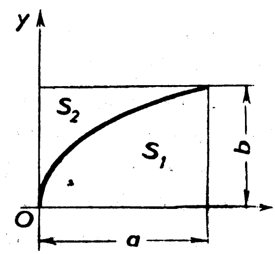
2612. Dokazati da važi sledeći obrazac:

$$\int_a^b (ax+b)\,f(x)\,dx=(a\xi+b)\int_a^b f(x)\,dx,$$

u kojem je ξ apscisa težišta krivolinijskog trapeza, koji za osnovicu ima odsečak $[a, b]$, a ograničen je lukom krive $y=f(x)$. (Vereščaginovo pravilo).

2613. Naći težište simetričnog paraboličnog odsečka čija je osnovica a i visina h.

2614. Pravougaonik čije su stranice a i b, podeljen je na dva dela lukom parabole čije se teme poklapa sa jednim od temena pravougaonika i koja prolazi kroz drugo naspramno teme (sl. 49). Naći težišta oba dela pravougaonika.



Sl. 49

2615. Naći koordinate težišta polovine kružne linije $y=\sqrt{r^2-x^2}$.

2616. Naći koordinate težišta oblasti ograničene polovinom kružne linije $y=\sqrt{r^2-x^2}$ i odgovarajućim delom apscisne ose.

2617. Naći težište kružnog luka poluprečnika R, koji odgovara centralnom uglu α.

2618. Naći koordinate težišta oblasti ograničene koordinatnim osama i parabolom $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}$.

2619. Naći koordinate centra oblasti ograničene koordinatnim osama i lukom elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, koja leži u prvom kvadrantu.

2620. Naći statički moment luka elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, koji leži u prvom kvadrantu, u odnosu na apscisnu osu.

2621. Naći koordinate težišta oblasti ograničene lukom krive $y = \sin x$ i odsečkom apscisne ose od $x_1 = 0$ do $x_2 = \pi$.

U zadacima 2622—2624 naći statički momenat figure ograničene datim linijama, u odnosu na apscisnu osu.

2622. $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ i $y = x^2$.

2623. $y = \sin x$ i $y = \dfrac{1}{2}$ (jednog segmenta).

2624. $y = x^2$ i $y \sqrt{x}$.

2625. Naći koordinate težišta oblasti ograničene zatvorenom krivom $y^2 = ax^3 - x^4$.

2626. Naći koordinate težišta luka lančanice $y = \dfrac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}}\right)$, koji leži između tačaka sa apscisama $x_1 = -a$ i $x_2 = a$.

2627. Dokazati da statički momenat proizvoljnog luka parabole u odnosu na osu parabole proporcionalan razlici poluprečnika krivine u krajnjim tačkama luka; koeficijenat proporcionalnosti je $\dfrac{p}{3}$, pri čemu je p — parametar parabole.

2628. Naći koordinate težišta prvog svoda cikloide

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t).$$

2629. Naći koordinate težišta oblasti ograničene prvim svodom cikloide i apscisrom osom.

2630. Naći koordinate težišta luka astroide $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, koji leži u prvom kvadrantu.

2631. Naći koordinate težišta oblasti ograničene koordinatnim osama i lukom astroide (u I kvadrantu).

2632. Dokazati da se apscisa i ordinata težišta oblasti, ograničene lukom krive $\rho = \rho(\varphi)$ i potezima krajnjih tačaka tog luka, izražavaju obrascima

$$x = \frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \cos\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}, \qquad y = \frac{2}{3}\,\frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^3 \sin\varphi \, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2 \, d\varphi}.$$

2633. Naći dekartove koordinate težišta oblasti ograničene jednim poluzavojem arhimedove spirale $\rho = a\varphi$ (od $\varphi_1 = 0$ do $\varphi_2 = \pi$) i potegom završne tačke

2634. Naći težište kružnog isečka poluprečnika R čiji je centralni ugao 2α.

2635. Naći dekartove koordinate težišta oblasti ograničene kardioidom $\rho = a(1 + \cos\varphi)$.

2636. Naći dekartove koordinate težišta oblasti ograničene desnom polovinom Bernulijeve lemniskate $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$.

2637. Pokazati da se dekartove koordinate težišta luka krive $\rho = \rho(\varphi)$ izražavaju obrascima

$$x = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \cos\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}, \qquad y = \frac{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho \sin\varphi \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}{\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\, d\varphi}.$$

2638. Naći dekartove koordinate težišta luka logaritamske spirale $\rho = a e^{\varphi}$ $\left(\text{od } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ do } \varphi_2 = \pi\right)$.

2639. Naći dekartove koordinate težišta luka kardioide $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ (od $\varphi_1 = 0$ do $\varphi_2 = \pi$).

2640. Na kom odstojanju od geometrijskog centra leži težište polulopte poluprečnika R?

2641. Naći težište površine polusfere.

2642. Poluprečnik osnove pravog kružnog konusa je R a visina H; naći rastojanje od osnove konusa do: težišta njegove bočne površine, njegove ukupne površine i njegovog obima.

2643. Na kom odstojanju od osnove leži težište tela ograničenog obrtnim paraboloidom i ravni normalnom na njegovu osu, ako je visina tela h?

2644. Naći momenat inercije odsečka $AB = l$ u odnosu na osu koja leži u istoj ravni sa odsečkom, ako je tačka A udaljena od ose za a jedinica, a tačka B — za b jedinica.

2645. Naći momenat inercije polovine kružne linije poluprečnika R — u odnosu na odgovarajući prečnik.

2646. Naći momenat inercije luka krive $y = e^x$ $\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}\right)$ u odnosu na apscisnu osu.

2647. Izračunati momente inercije jednog svoda cikloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ — u odnosu na obe koordinatne ose.

2648. Naći momenat inercije pravougaonika čije su stranice a i b — u odnosu na stranicu a.

2649. Naći momenat inercije trougla osnovice a i visine h u odnosu na

1) osnovicu;

2) pravu paralelnu osnovici, koja prolazi kroz vrh;

3) pravu paralelnu osnovici, koja prolazi kroz težište trougla.

2650. Naći momenat inercije polukružne ploče poluprečnika R u odnosu na odgovarajući prečnik.

2651. Naći momenat inercije kružne ploče u odnosu na centar.

2652. Naći momenat inercije eliptične ploče sa poluosama a i b — u odnosu na svaku od osa.

2653. Naći momenat inercije cilindra čiji je poluprečnik osnove R a visina H — u odnosu na njegovu osu.

2654. Naći momenat inercije konusa poluprečnika R i visine H. u odnosu na njegovu osu.

2655. Naći momenat inercije kugle poluprečnika R u odnosu na njen prečnik.

2656. Elipsa se obrće oko jedne od svojih osa; naći momenat inercije dobijenog tela (obrtni elipsoid) u odnosu na osu obrtanja.

2657. Naći momenat inercije obrtnog paraboloida čiji je poluprečnik osnove R i visina H, u odnosu na osu obrtanja.

2658. Izračunati momenat inercije tela ograničenog jednogranim hiperboloidom $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-z^2=1$ i ravnima $z=0$ i $z=1$ u odnosu na z-osu.

2659. Krivolinijski trapez ograničen krivama $y=e^x$, $y=0$, $x=0$ i $x=1$, obrće se 1) oko x-ose; 2) oko y-ose. Izračunati momenat inercije tako dobijenog tela u odnosu na osu obrtanja.

2660. Naći momenat inercije bočne površine cilindra (poluprečnik osnove cilindra je R a visina H) u odnosu na njegovu osu.

2661. Naći momenat inercije bočne površine konusa (poluprečnik osnove je R, visina H) u odnosu na njegovu osu.

2662. Naći momenat inercije sferne površine poluprečnika R u odnosu na njen prečnik.

Guldenove teoreme

2663. Pravilan šestougao stranice a obrće se oko jedne svoje stranice; naći zapreminu tako nastalog tela.

2664. Elipsa čije su ose $AA_1=2a$ i $BB_1=2b$ obrće se oko prave paralelne osi AA_1 i udaljenoj od nje za $3b$; naći zapreminu tako nastalog tela.

2665. Astroida se obrće oko ose koja prolazi kroz njena dva susedna vrha (šiljka); naći zapreminu i površinu tako nastalog tela (vidi zad. 2630).

2666. Figura koju obrazuju po jedan prvi svod cikloidâ

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

i

$$x=a(t-\sin t),\quad y=-a(1-\cos t)$$

obrće se oko y-ose; naći zapreminu i površinu tako nastalog tela.

2667. Kvadrat se obrće oko ose koja leži u njegovoj ravni i prolazi kroz jedno njegovo teme. Za koji će položaj ose u odnosu na kvadrat zapremina dobijenog obrtnog tela biti maksimalna? Rešiti istovetan zadatak za trougao.

§ 2. Neki zadaci iz fizike

2668. Brzina tela data je obrascem $x = \sqrt{1+t}$ *m/sek*. Naći put koji telo pređe u toku prvih 10 sekundi od početka kretanja.

2669. Pri harmoniskom oscilovanju oko koordinatnog početka duž apscisne ose brzina kretanja tačke data je obrascem

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T} \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi_0\right)$$

u kojem je t — vreme, T — period oscilovanja, φ_0 — početna faza. Naći položaj tačke u trenutku t_2 ako je u trenutku t_1 njena oscilacija bila x_1.

Sila f uzajamnog privlačenja dve materijalne tačke određena je obrascem $f = k\frac{mM}{r^2}$, u kome su m i M mase tačaka, r — rastojanje između njih, a k — koeficijent proporcionalnosti čija je vrednost $6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot sec^2}$ Njutnom zakon). Na osnovu toga re.iti zadatke 2670—2678 (predpostavljajući da je gustina konstantna).

2670. Štap AB dužine l i mase M, privlači tačku C mase m, koja leži na njegovu produžetku na odstojanju a od bližeg kraja B štapa. Naći silu uzajamnog privlačenja štapa i tačke. Kolika mora biti masa koja bi smeštena u tačku A, dejstvovala na C istom silom kao i štap AB? Koliki rad izvrši privlačna sila dok se tačka C sa udaljenosti r_1 od štapa približi na odstojanje r_2 pomerajući se duž prave na kojoj leži štap?

2671. Kolika je sila kojom poluprsten poluprečnika r i mase M dejstvuje na materijalnu tačku mase m koja leži u njegovom centru?

2672. Kolika je sila kojom žičani prsten mase M i poluprečnika R dejstvuje na materijalnu tačku C mase m, koja leži na pravoj što prolazi kroz centar prstena i normalna je na njegovoj ravni, ako udaljenost tačke C od centra prstena iznosi a? Koliki rad izvrši privlačna sila primičući tačku iz beskonačnosti i centar kruga?

2673. Koristeći rezultat predhodnog zadatka izračunati silu kojom tanka kružna ploča poluprečnika R i mase M dejstvuje na materijalnu tačku mase m, koja leži na osi ploče na odstojanju a od njenog centra.

2674. Koristeći rezultat predhodnog zadatka izračunati silu kojom na materijalnu tačku mase m dejstvuje sva ravan po kojoj je ravnomerno raspoređena masa površinske gustine σ, ako odstojanje tačke od ravni iznosi a.

2675. Poluprečnici osnova zarubljenog pravog kružnog konusa su R i r, visina mu je h a gustina γ; kolika je sila kojom konus dejstvuje na materijalnu tačku mase m, postavljenu u vrh konusa?

2676. Kolika je sila kojom materijalna kriva $y = |x| + 1$ privlači materijalnu tačku m koja leži u koordinatnom početku? (Linearna gustina krive je γ).

2677. Dokazati da materijalna zalomljena linija $y=a|x|+1$ $(a\geqslant 0)$ privlači materijalnu tačku koja leži u koordinatnom početku, silom koja ne zavisi od a, tj. od veličine ugla između sastavljenih delova linije.

2678*. Dva istovetna štapa (dužina svakog od njih je l a masa M) leže na istoj pravoj na odstojanju l jedan od drugoga. Izračunati silu njihovog uzajamnog privlačenja.

2679. Kap, čija je početna masa M, pada pod dejstvom sile teže i ravnomerno isparava gubeći svake sekunde masu m. Koliki je rad sile teže za vreme od početka kretanja do trenutka kad kap potpuno ispari? (Otpor vazduha se zanemaruje).

2680. Koliki rad treba izvršiti da bi se nasula gomila peska koja ima oblik zarubljenog konusa čija je visina H a poluprečnici osnova R i r $(r<R)$, ako je specifična težina peska d (pesak se podiže sa površine zemlje na kojoj leži donja osnova konusa).

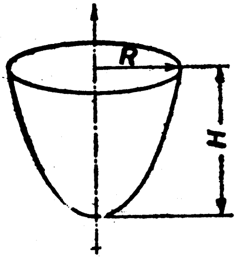
2681. Dimenzije Heopsove piramide su približno ove: visina 140 m, ivica kvadretne osnove 200 m; specifična težina kamena od kojeg je sazidana iznosi približno 2,5 p/cm^3. Izračunati rad utrošen na savlađivanje sile teže prilikom njenog zidanja.

2682. Izračunati rad koji se mora utrošiti da bi se iscrpla voda kojom je napunjen cilindrečni rezervoar visine $H=5\ m$ sa kružnom osnovom poluprečnika $R=3\ m$.

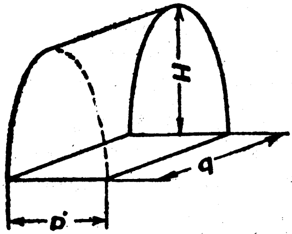
2683. Izračunati rad koji se mora utrošiti da bi se iscrpla tečnost specifične težine d iz rezervoara koji ima oblik konusa (sa vrhom okrenutim na dole) čija je visina H i poluprečnik osnove R. Koliki će biti taj rad ako se konus okrene vrhom na gore?

2684. Izračunati rad koji se mora utrošiti da bi se iscrpla voda kojom je napunjen rezervoar oblika polovine sfere, ako mu je poluprečnik $R=0{,}6\ m$.

2685. Kazan ima oblik obrtnog paraboloida (sl. 50); poluprečnik osnove mu je $R=2\ m$, a dubina $H=4\ m$. Kazan je napunjen tečnošću čija je specifična težina $d=0{,}8\ p/cm^3$. Izračunati rad koji se mora utrošiti da bi se iscrpla sva voda iz kazana.



Sl. 50

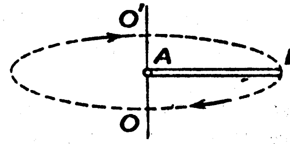


Sl. 51

2686. Naći rad koji se mora utrošiti da bi se iscrpla voda iz cisterne čija bočna površina ima oblik paraboličnog cilindra (sl. 51) i čije su dimenzije: $a=0{,}75\ m$, $b=1{,}2\ m$, $H=1\ m$.

Kinetička energija tela koje se obrće oko nepomične ose je $\frac{1}{2} J\omega^2$, pri čemu je ω — ugaona brzina, a J — momenat inercije u odnosu na obrtanja. Na osnovu toga rešiti zadatke 2687—2692.

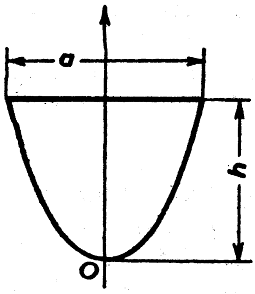
2687. Štap AB (sl. 52) obrće se u horizontalnoj ravni oko OO' ugaonom brzinom $\omega = 10\pi\, sek^{-1}$; poprečni presek štapa je $S = 4\ cm^2$, dužina mu je $l = 20\ cm$, a gustina materijala od kojeg je napravljen $\gamma = 7{,}8\ g/cm^3$. Naći kinetičku energiju štapa.



Sl. 52

2688. Pravougaona ploča čije su stranice $a = 50\ cm$ i $b = 40\ cm$, obrće se konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 3\pi\, sec^{-1}$ oko stranice a. Naći kinetičku energiju ploče ako joj je debljina $d = 0{,}3\ cm$, a gustina materijala od kojeg je napravljena $\gamma = 8\ g/cm^3$.

2689. Trougaona ploča čija je osnovica $a = 40\ cm$ a visina $h = 30\ cm$, obrće se oko svoje osnovice konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 5\pi\ sek^{-1}$. Naći kinetičku energiju ploče ako joj je debljina $d = 0{,}2\ cm$, a gustina materijala od kojeg je napravljena je $\gamma = 2{,}2\ g/cm^3$.



Sl. 53

2690. Ploča koja ima oblik paraboličnog segmenta obrće se oko ose parabole konstantnom ugaonom brzinom $\omega = 4\pi\, sec^{-1}$; osnovica segmenta je $a = 20\ cm$, visina $h = 30\ cm$, debljina $d = 0{,}3\ cm$ gustina materijala $\gamma = 7{,}8\ g/cm^3$. Naći kinetičku energiju ploče. (sl. 53).

2691. Kružni cilindar čiji je poluprečnik osnove R i visina H, obrće se oko svoje ose konstantnom brzinom ω; gustina materijala od kojeg je cilindar napravljen je γ. Naći kinetičku energiju cilindra.

2692. Tanka žica mase M savijena je u vidu polukruga poluprečnika R i obrće se oko ose koja prolazi kroz krajeve polukruga brzinom od n obrta u minutu; izračunati njenu kinetičku energiju. — Izračunati kinetičku energiju u slučaju da se za osu obrtanja uzme tangenta u srednjoj tački polukruga.

2693. Tanka pločica koja ima oblik trougla čija je osnovica a i visina h, zagnjurena je vertikalno u vodu tako da joj osnovica leži na površini vode.

a) Izračunati pritisak vode na jednu od strana pločice.

b) Koliko se puta poveća pritisak ako se pločica okrene tako da joj vrh bude na površini vode a osnovica — paralelna površini vode?

2694. Kvadratna pločica zagnjurena je vertikalno u vodu tako da jedno od temena kvadrata leži na površini vode, a jedna od njegovih dijagonala je paralelna površini vode; ivica pločice je a. Koliki je pritisak vode na jednu od strana ploče?

2695. Izračunati pritisak vode na branu, koja ima oblik jednakokrakog trapeza, čija je gornja osnovica $a = 6{,}4\ m$, donja $b = 4{,}2\ m$, a visina $H = 3\ m$.

2696. Pločica eliptičnog oblika zagnjurena je do polovine (vertikalno) u tečnost tako da joj jedna od osa (dužine $2b$) leži na površini; koliki je pritisak tečnosti na jednu stranu pločice ako potopljena poluosa elipse ima dužinu a, a specifična težina tečnosti je d?

2697. Pravougaona pločica čije su stranice a i b ($a>b$) zagnjurena je u tečnost pod uglom α prema površini tečnosti; veća stranica je paralelna površini tečnosti i leži na dubini h. Izračunati pritisak tečnosti na svaku od strana pločice, ako je specifična težina tečnosti d.

2698. Pravougaoni sud napunjen je jednakim (po zapremini) količinama vode i ulja, pri čemu je ulje dva puta lakše od vode. Pokazati da će se pritisak na svaki zid suda smanjiti za jednu petinu prvobitnog ako se mesto mešavine uzme samo ulje (uzeti u obzir da će sve ulje biti pri vrhu).

Pri rešavanju zadataka 2699—2700 treba primeniti Arhimedov zakon: sila pritiska koja dejstvuje na tvrdo telo potopljeno u tečnost jednaka je težini njime istisnute tečnosti.

2699. Drveni plovak cilindričnog oblika, čija je površina osnove $S=4\,000\ cm^2$ a visina $H=50\ cm$, pliva na površini vode; specifična težina drveta je $d=0{,}8\ p/cm^3$. a) Koliki rad treba izvršiti da bi se plovak izvukao iz vode? b) Koliki rad treba utrošiti da bi se plovak potpuno potopio u vodu?

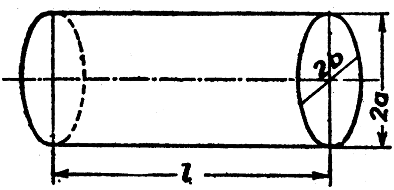
2700. Kugla poluprečnika R, specifične težine 1 potopljena je u vodu tako da dodiruje površinu vode; koliki rad treba utrošiti da bi se kugla izvukla iz vode?

Zadazi 2701—2706 u vezi su sa pojavom isticanja tečnosti kroz mali otvor. Za brzinu isticanja važi Toričelijev zakon $v=\sqrt{2gh}$, pri čemu je h — visina stuba tečnosti iznad otvora, a g — ubrzanje zemljine teže*).

2701. Na dnu cilindričnog suda čija je površina osnove $100\ cm^2$ a visina $30\ cm$ nalazi se otvor; izračunati površinu tog otvora znajući da voda kojom je sud napunjen istekne iz njega u toku $2\ min$.

2702. Konusni levak napunjen je vodom do visine $H=20\ cm$; Poluprečnik gornjeg otvora je $R=12\ cm$, a donji otvora kroz koji se voda izliva iz levka, ima poluprečnik $r=0{,}3\ cm$. a) Za koje će se vreme nivo vode u levku spustiti za $5\ cm$? b) Kad će se levak isprazniti?

2703. Na dnu kazana koji ima oblik polusfere poluprečnika $R=43\ cm$ pojavila se rupa površine $S=0{,}2\ cm^2$; za koje će vreme voda, kojom je napunjen kazan, isteći iz njega?

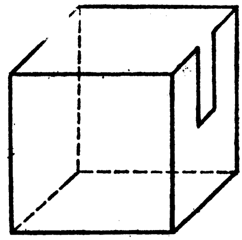


Sl. 54

2704. Kazan ima oblik eliptičnog cilindra sa horizontalnom osom. Poluose eliptičnog preseka (normalnog na osu cilindra) su b (horizontalna) i a (vertikalna), a generetrisa cilindra je l (sl. 54). Kazan je ispunjen vodom do polovine. Za koje će vreme voda isteći iz kazana kroz njegov otvor čija je površina S?

*) U ovom vidu Toričelijev zakon se može primeniti samo na idealnu tečnost, i za takvu su i dati odgovori na zadatke (u praksi se primenjuje obrazac $v=\mu\sqrt{2gh}$, u kojem je μ koeficijent koji zavisi od viskoznosti tečnosti i karakteristika otvora kroz koji ističe tečnost. Za vodu je u najprostijem slučaju $\mu=0{,}6$.

2705. U vertikalnom zidu prizmatičnog suda napunjenog vodom napravljen je pravougaoni vertikalni otvor čija je visina h a širina b; gornja ivica otvora, paralelna površini vode, leži na rastojanju H ispod površine. Koliko vode isteče iz suda za 1 sekund ako se pretpostavi da se nivo vode u sudu za sve vreme održava na istoj visini? Razmotriti posebno slučaj kad je $H=0$ (problem vodoslivnika).

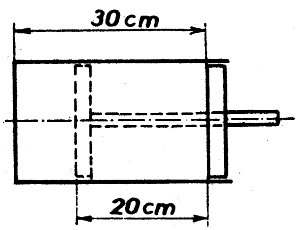


Sl. 55

2706. Sud napunjen do vrha vodom ima oblik paralelopipeda sa površinom osnove 100 cm^2; u njegovom bočnom zidu je uski prorez visok 20 cm a širok 0,1 cm (sl. 55). Za koje će vreme nivo vode u sudu opasti: a) za 5 cm? b) za 10 cm; c) za 19 cm? d) za 20 cm? (Iskoristiti rezultat prethodnog zadatka).

Jednačina stanja idealnog gasa ima oblik $pv=RT$, gde je p — pritisak, v — zapremina, T — apsolutna temperatura, i R — gasna konstanta za datu masu gasa. Rešiti zadatke 2707—2709 smatrajući gasove idealnim.

2707. Cilindar, kod kojeg je površina osnove 10 cm^2 i visina 30 cm, ispunjen je vazduhom pod atmosferskim pritiskom. Koliki se rad mora izvršiti da bi se klip ugurao u cilindar za 20 cm tj. da bi se doveo na 10 cm odstojanja od dna cilindra (sl. 56)? Atmosferski pritisak je 1,033 kg/cm^3, a proces se odvija izotermično, tj. pri konstantnoj temperaturi (Da bi se dobio rad u kgm treba pritisak uzeti u kg/m^2, a zapreminu u m^3).



Sl. 56

2708. Cilindrični sud, kod kojeg je površina poprečnog preseka 100 cm^2, ispunjen je vazduhom pod atmosferskim pritiskom. U sudu se nalazi klip čije odstojanje od dna cilindra iznosi 0,1 m. Sud je unet u prazan prostor, usled čega se vazduh u njemu širi i potiskuje klip. 1) Izračunati rad koji izvrši vazduh u cilindru podižući klip na visinu od a) 0,2 m; b) 0,5 m; c) 1 m. 2) Može li se taj rad neograničeno povećavati pri neograničenom širenju gasa? (proces kao u prethodnom zadatku, teče izotermično).

2709. U cilindričnom sudu čija je zapremina $v_0=0{,}1\ m^3$ nalazi se vazduh pod atmosferskim pritiskom, koji se sabija brzim utiskivanjem klipa (pri tom se računa da se proces odvija bez dovođenja ili odvođenja toplote tj. adijabatski). Koliki se rad mora utrošiti da bi se vazduh u sudu sabio na zapreminu od $v=0{,}03\ m^3$? (Atmosferski pritisak iznosi 1,033 kg/cm^3). Kod adijabatskog procesa pritisak i zapremina gasa vezani su relacijom $pv^\gamma=p_0 v_0^\gamma$ (Puasonova jednačina). Za dvoatomne gasove (a isto tako i za vazduh) je $\gamma\approx 1{,}40$.

Po Njutnovom zakonu brzina hlađenja tela proporcionalna je razlici između temperature tela i temperature okolne sredine. Primenom ovog zakona rešiti zadatke 2710—2711.

2710. Telo čija je temperatura 25° uneto je u termostat (njegova se temperatura održava na 0°). Za koje će vreme temperatura tela spasti na 10°, ako se ona u toku 20 *min* spusti na 20°?

2711. Telo čija je temperatura 30° za 30 *min* stajanja u termostatu čija je temperatura 0° ohladi se na 22,5°. Kolika će biti temperatura tela nakon 3 sata od početka opita?

Po Kulonovu zakonu sila kojom dve količine elektriciteta od q_1 i q_2 kulona, na međusobnom rastojanju od r metara, dejstvuju jedna na drugu iznosi $\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \varepsilon r^2}$ njutna, pri čemu je: $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$, $(4\pi\varepsilon_0 = 1{,}11 \cdot 10^{-10})$, a ε je dielektrična konstanta sredine u odnosu na vakuum (za vazduh je $\varepsilon \approx 1$). (Racionalizovani sistem jedinica MKSA). Primenom ovog zakona rešiti zadatke 2712—2714.

2712. Beskonačna prava nabijena je ravnomerno pozitivnim elektricitetom (linearna gustina elektriciteta je σ). Kojom silom dejstvuje ova prava na količinu elektriciteta smeštenu u tačku A na rastojanju a od nje? Dielektrična propustljivost (permeabilitet) sredine jednaka je jedinici.

2713. Dve količine elektriciteta $q_1 = 6{,}67 \cdot 10^{-9}\,C$ i $q_2 = 10 \cdot 10^{-9}\,C$ udaljene su jedna od druge za 10 *cm*, a sredina koja ih razdvaja je vazduh. U početku su obe količine elektriciteta nepomične, a zatim se q_2 oslobađa, i pod dejstvom odbojne sile počinje da se kreće udaljavajući se od q_1. Koliki rad izvrši odbojna sila dok se q_2: a) udalji na 30 *cm*? b) udalji u beskonačnost?

2714. Dve količine elektriciteta $q_1 = 33{,}3 \cdot 10^{-9}\,C$ i $q_2 = 40 \cdot 10^{-9}\,C$ udaljene su jedna od druge za 20 *cm*. Koliko će biti rastojanje između njih ako drugu od njih približimo prvoj uz utrošak rada od $18 \cdot 10^{-5}$ džula? (Sredina koja ih razdvaja je vazduh).

2715. Napon na krajevima električnog kola je $U = 120\,V$. U kolo se ravnomerno uvodi otpor brzinom od $0{,}1\,\Omega$ u sekundi. Pored ovog u kolo je uključen i konstantan otpor $r = 10\,\Omega$. Koliko kulona elektriciteta prođe kroz kolo u toku dva minuta?

2716. Napon na krajevima električnog kola, koji je u početku iznosio $120\,V$, ravnomerno opada brzinom od $0{,}01\,V$ u sekundi. Istovremeno u kolo se uvodi otpor takođe konstantnom brzinom od $0{,}1\,\Omega$ u sekundi. Osim toga u kolo je uključen i konstantan otpor od $12\,\Omega$. Koliko će kulona elektriciteta proteći kroz kolo u toku 3 minuta?

2717. Kad se menja temperatura menja se i otpor metalnih provodnika (na običnim temperaturama) po obrascu $R = R_0(1 + 0{,}004\,v)$ u kojem je R_0 otpor na 0°C, a v — temperatura po Celzijusu. (Ovaj obrazac važi za većinu čistih metala). Provodnik, čiji otpor na 0°C je 10 Ω, zagreva se ravnomerno od $v_1 = 20°$ do $v_2 = 200°$ u toku 10 *min*. Za to vreme kroz njega teče struja pod naponom od 120 *V*. Koliko će kulona elektriciteta proteći za to vreme kroz provodnik?

2718. Zakon po kojem se menja napon naizmenične struje, čija je frekvencija ω, izražava se sledećim obrascem: $E = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$, u kojem je E_0 maksimalni napon, φ — faza, a t — vreme. Naći srednju vrednost kvadrata napona u toku jednog perioda. Pokazati da pri konstantnom otporu naizmenična struja stvara u toku jednog perioda istu količinu toplote kao i jednosmerna čiji je napon $\sqrt{(E^2)_{sr}}$ (Zbog toga se vrednost $\sqrt{(E^2)_{sr}}$ naziva efektivnim naponom naizmenične struje).

2719. Napon naizmenične struje dat je obrascem $E = E_0 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$, a jačina struje obrascem

$$I = I_0 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi_0\right),$$

pri čemu su E_0 i I_0 konstantni (maksimalne vrednosti napona i jačina struje), T je period a φ_0 je tzv. fazna razlika. Izračunati rad struje za vreme od $t_1 = 0$ do $t_2 = T$ i pokazati da će taj rad biti najveći kad je fazna razlika φ_0 jednaka nuli.

2720. Izračunati vreme u toku kojeg se električnim uređajem zagreje 1 *kg* vode od 20° do 100°C, ako je napon struje 120 *V*, otpor spirale 14,4 Ω, temperatura vazduga u prostoriji 20°C, i ako se zna da se 1 *kg* vode ohladi od 40° do 30°C u toku 10 *min*. (Po Džul-Lencovu zakonu je $Q = I^2 Rt$ pri čemu je Q — količina toplote u džulima, I — jačina struje u amperima, R — otpor u omima, i t — vreme u sekundama; specifična toplota vode je $4190 \frac{J}{kg \cdot °C}$. Osim toga primeniti i Njutnov zakon hlađenja; vidi zad. 2710).

2721. Vazduh kojim je ispunjen sud zapremine 3 *l*, sadrži 20% kiseonika. Iz suda izlaze dve cevi. Kroz jednu od njih u sud počinje da protiče čist kiseonik, a kroz drugu izlazi isto toliko vazduha koliko u sud pritiče kiseonika. Kolika će biti količina kiseonika u sudu po isteku vremena u toku kojeg kroz sud prođe 10 *l* gasa? (predpostavlja se da se u svakom trenutku stalnim mešanjem obezbeđuje ista koncentracija kiseonika u svoj unutrašnjosti suda).

2722. Vazduh sadrži *a* % (= 8%) ugljendioksida koji se propušta kroz cilindrični sud s apsorbujućom masom. Tanak sloj mase apsorbuje količinu gasa proporcionalnu njegovoj koncentraciji i debljini sloja. a) Ako vazduh, koji prođe kroz sloj debeo *H cm* (= 10 *cm*), sadrži *b* % (= 2%) ugljendioksida kolika mora biti debljina H_1 apsorbujućeg sloja da bi vazduh, po izlasku iz filtra, sadržavao samo *c* % (= 1%) ugljendioksida? b) Koliko će procenata ugljendioksida ostati u vazduhu koji prođe kroz filtar ako je debljina apsorbujućeg sloja 30 *cm*?

2723. Ako se pri prolazu kroz sloj vode debeo 3 *m* upije polovina prvobitne količine svetlosti, koliki će deo ove količine dospeti do dubine od 30 *m*? (Količina svetlosti koja se upija pri prolazu kroz tanak sloj vode proporcionalna je debljini sloja i količini svetlosti koja padne na njegovu površinu).

2724. Ako prvobitna količina kvasca koja iznosi 1 *g*, u toku jednog sata naraste na 1,2 *g*, kolika će ona biti nakon 5 sati od početka vrenja, ako se uzme da je brzina narastanja kvasca u svakom trenutku proporcionalna količini postojećeg kvasca u tom trenutku.

2725. Ako količina kvasca nakon 2 sata od početka vrenja iznosi 2 *g*, a nakon 3 sata ta je količina 3 *g*, kolika je bila početna količina kvasca? (Vidi prethodni zadatak).

2726. Dva kilograma soli rastvaraju se u 30 *l* vode. Za prvih 5 *min* rastvori se 1 *kg* soli. Za koje će se vreme rastvoriti 96% prvobitne količine soli? (Brzina rastvaranja proporcionalna je količini nerastvorne soli i razlici između koncentracije zasićenog rastvora, koja iznosi 1 *kg* na 3 *l*, i koncentracije rastvora u uočenom trenutku).

REZULTATI

2455. $\frac{16}{3}$. **2456.** $\frac{9}{4}$. **2457.** $\frac{16}{3}p^2$. **2458.** $\frac{1}{3}$. **2459.** $\frac{32}{3}\sqrt{6}$.

2460. $2\frac{1}{4}$. **2461.** $2\pi+\frac{4}{3}$ i $6\pi-\frac{4}{3}$.

2462. $\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$ i $\frac{4}{3}(8\pi-\sqrt{3})$.

2464. $\frac{b^2c}{a}-ab\ln\frac{c+b}{a}=b\,[\varepsilon b-a\ln(\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2-1})]$, gde je ε ekscentricitet.

2465. $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$; $a^2\left[\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{2}}{8}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$

i $a^2\left[\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{2})\right]$.

2466. $S_1=S_3=\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 3-2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}\approx 0{,}46$. $S_2=2(\pi-S_1)$,

2467. $\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$. **2468.** $\frac{1}{12}$. **2469.** $\frac{1}{12}$.

2470. $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$; $4\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, ako su brojevi m i n oba parni; $2\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, ako su m i n —oba neparni; $\left|\frac{m-n}{m+n}\right|$, ako je jedan od brojeva m i n paran a drugi neparan.

2471. a) $\frac{3}{14}$; b) $73\frac{1}{7}$. **2472.** 1. (oblast se sastoji iz dva dela čije su površine jednake među sobom. **2473.** $\frac{8}{15}$. **2474.** $\frac{3}{4}\pi$. **2475.** $\frac{4}{}$.

2476. $\frac{\pi a^2}{8}$. **2477.** $8\left(\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}-\operatorname{arctg}\sqrt{1+\frac{2}{3}\sqrt{3}}\right)$.

2478. $e+\frac{1}{e}-2$. **2479.** 4. **2480.** $\frac{3}{e}(e^3-4)$. **2481.** $\frac{18}{e^2}-2$.

2482. a) $b(\ln b-1)-a(\ln a-1)$; b) $b-a$. **2483.** $3-e$.

2484. $\frac{3-2\ln 2-2\ln^2 2}{16}$. **2485.** $2-\sqrt{2}$. **2486.** $\frac{1}{3}+\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2487. $\frac{5}{3}\sqrt{2}$. **2488.** $(\sqrt{2}-1)$. **2489.** $\frac{\pi}{4}$. **2490.** $3\pi a^2$.

2491. $\frac{3}{8}\pi a^2$. **2492.** $6\pi a^2$.

2493. 1) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n+1)(n+2)$; 2) $\frac{\pi R^2}{n^2}(n-1)(n-2)$.

2494. 1) $\frac{72}{5}\sqrt{3}$; 2) $\frac{8}{15}$. **2495.** 1) $\frac{4}{3}\pi^3 a^2$; 2) $\frac{76a^2\pi^3}{3}$.

2496. $\frac{\pi a^2}{2}$ (četvorolisna rozeta). **2497.** $\frac{\pi a^2}{4}$. **2498.** $18\pi a^2$.

2499. $\frac{a^2}{8}(4-\pi)$. **2500.** $\frac{37\pi}{6}-5\sqrt{3}$. **2501.** $\frac{51\sqrt{3}}{16}$. **2502.** a^2.

2505*. $a^2\,\frac{5\pi+18\sqrt{3}}{32}$. Pri crtanju krive treba posmatrati menjanje promenljive φ od 0 do 3π. **2506.** $\frac{\pi}{4}$. **2507.** a^2. **2508.** $a^2\left(1+\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2509. $\frac{\pi}{2}(a^2+b^2)$. **2510.** a^2. **2511.** $\pi\sqrt{2}$. **2512.** π. **2513.** 2.

2514. $3\pi a^2$. **2515.** 4π. **2516*.** 1) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 2) $\sqrt{\pi}$. Iskoristiti obrazac $\int_0^\infty e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (Puasonov integral).

2517. $\frac{\pi a^2}{2}$. **2518.** $2-\frac{\pi}{2}$ i $2+\frac{\pi}{2}$. **2519.** $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}}\right)$.

2520. $\frac{y}{2p}\sqrt{y^2+p^2}+\frac{p}{2}\ln\frac{y+\sqrt{y^2+p^2}}{p}$. **2521.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$.

2522. $\ln 3-\frac{1}{2}$. **2523.** $\ln\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$. **2524.** $\frac{8}{9}\left(\frac{5}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}-1\right)$.

2525. $2\frac{26}{27}$. **2526.** $4a\sqrt{3}$. **2527.** $\frac{\pi}{2}+2\ln\operatorname{tg}\frac{3\pi}{8}=\frac{\pi}{2}+2\ln(\sqrt{2}+1)$.

2528. $\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\ln 3.$ **2529.** 2. **2530.** 8.

2531. za $t=\frac{2\pi}{3}$; $\left[x=a\left(\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad y=\frac{3a}{2}\right].$

2532. za $t=\frac{\pi}{6}$, $\left(x=\frac{3\sqrt{3}}{8}R, \quad y=\frac{R}{8}\right).$

2533*. $4\,\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$. Staviti $x=a\cos^3 t$, $y=b\sin^3 t$.

2534. $5a\left[1+\frac{1}{2\sqrt{3}}\ln(2+\sqrt{3})\right].$ **2535.** $a\ln\frac{a}{y}.$ **2536.** $\frac{\pi^2}{2}R.$

2537. $\frac{\pi^3}{3}.$ **2538.** $4\sqrt{3}.$ **2541.** $2(e^t-1).$

2543. $\pi a\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{a}{2}\ln(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}).$ **2545.** $\ln\frac{3}{2}+\frac{5}{12}.$

2546. $8a.$ **2547.** $\frac{3}{2}\pi a.$

2549. k mora imati oblik $\frac{2N+1}{2N}$ ili $\frac{2N}{2N-1}$, pri čemu je N ceo broj.

2550. 4. **2551.** $\ln\frac{\pi}{2}$ **2554*.** Dokazati da se dužina elipse može predstaviti u obliku

$$L=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{a^2\cos^2 t+b^2\sin^2 t}+\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}\right)dt,$$ i primeniti teoremu o proceni integrala.

2555. $2\pi.$ **2556.** 1) $\frac{4}{3}\pi ab^2$; 2) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$

2557. $\frac{8}{15}\pi h^2 a$ **2558.** $\frac{\pi h^2}{3}(3a+h).$ **2559.** $\frac{\pi}{4}e^2-1).$

2560. $\frac{\pi}{4}\left[\frac{e^{2b}-e^{-2b}}{2}-\frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2}+(b-a)\right].$ **2561.** $\frac{3\pi}{10}.$

2562. $\frac{\pi}{2}(15-16\ln 2).$ **2563.** $\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right).$ **2564.** $\frac{8\pi}{3}.$ **2565.** $2\pi^2.$

2566. $\frac{\pi a^3}{4}\left[\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})+-\frac{2}{3}\right].$ **2567.** 1) $\frac{2}{3}\pi a^3$; 2) $\frac{\pi^2}{16}.$ **2568.** $5\pi^2a^3.$

2569. $\pi a^3\left(\frac{3\pi^2}{2}-\frac{8}{3}\right).$ **2570.** $\frac{32}{105}\pi a^3.$ **2571.** $\frac{16\pi c^6}{105ab^2}.$ **2572.** $\frac{\pi^2}{2}.$

2573. $\frac{\pi e}{2}.$ **2574*.** 1) π; 2) $\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Vidi uputstvo uz zadatak 2516.

2575*. $\frac{3\pi\sqrt{2\pi}}{32}$. Vidi uputstvo uz zadatak 2516.

2576*. π^2. Iskoristiti obrazac $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$. (Dirihle-ov integral).

2577*. $2\pi^2 a^3$. Preporučljivo je preći na parametarske jednačine: $x = 2a \sin^2 t$, $y = \frac{2a \sin^3 t}{\cos t}$.

2578. $\frac{2}{3}\pi a^3$. **2579*.** $\frac{4}{3}\pi abc$. Primeniti obrazac $v = \int_{x_1}^{x_2} S(x)\,dx$, gde je $S(x)$ površina poprečnog preseka.

2580. 1) $\pi\sqrt{2}$; 2) 36π.

2581. $v_1 = \pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6} - \frac{11}{3}\right)$, $v_2 = \pi\sqrt{2}\left(2\sqrt{6} + \frac{11}{3}\right)$.

2582. $v_1 = v_3 = 4\pi(\sqrt{6} + \sqrt{3} - 4)$, $v_2 = 8\pi(4 - \sqrt{3})$.

2583. $\frac{8\pi\sqrt{6}}{3}$. **2584.** 8π.

2585*. $\frac{2}{3}R^2H = 400\ cm^3$. Za apscisnu osu uzeti osu simetrije osnove.

2586. $\frac{4}{15}ahH = 128\ cm^3$. **2587.** $\frac{2}{3}abH = 133\frac{1}{3}\ cm^3$.

2588*. $\frac{2}{3}\pi R^2 H$. Površina simetričnog paraboličnog segmenta je $\frac{2}{3}ah$, pri čemu je a — osnovica, a h — „visina“ segmenta.

2589*. $\frac{R^2H}{6}\left(\pi + \frac{4}{3}\right)$ i $\frac{R^2H}{6}\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$.

2590. $\frac{8}{3}a^3$. **2591.** $\frac{8}{3}\pi r^3$. **2592.** $\frac{16}{3}R^3$. **2593.** $\frac{4}{3}R^2H$.

2594. $\frac{56}{3}\pi a^2$. **2595.** $\frac{\pi}{9}\left(\sqrt{(1+a^4)^3} - 1\right)$. **2596.** $\frac{\pi a^2}{4}(e^2 - e^{-2} + 4)$. (Vidi uputstvo uz zadatak 2588.)

2597. $2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{\varepsilon}\arcsin\varepsilon$ i $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{\varepsilon}\ln\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, gde je ε — ekscentricitet elipse.

2598. $\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

2599. $\pi\left[\sqrt{5} - \sqrt{2} + \ln\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right]$. **2600.** $3\pi a^2$.

2601. $\pi a^2\sqrt{2}\left(2 - \frac{\pi}{2}\right)$. **2602.** $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^{\pi} - 2)$. **2603.** $\frac{12}{5}\pi a^2$.

2604. $8\pi a^2\left(\pi - \frac{4}{3}\right)$. **2605.** $\frac{32}{5}\pi a^2$. **2606.** $4\pi^2 r^2$.

2607. $2\pi a^2(2 - \sqrt{2})$. **2608.** $\pi[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$. **2609.** $4\pi a^2$.

2610. $\frac{ah^2}{2}$. **2611.** $\frac{a^3}{6}$, $\frac{a^3}{6}$, $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.

2613. Težište leži na osi simetrije segmenta na odstjanju $\frac{2}{3}h$ od osnove.

2614. Za S_1: $\xi=\frac{3}{5}a$, $\eta=\frac{3}{8}b$; za S_2: $\xi=\frac{3}{10}a$, $\eta=\frac{3}{4}b$.

2615. $\xi=0$, $\eta=\frac{2r}{\pi}$. **2616.** $\xi=0$, $\eta=\frac{4r}{3\pi}$.

2617. Težište leži na simetrali centralnog ugla koji odgovara luku, na rastojanju $2r\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ od centra.

2618. $\xi=\frac{\alpha}{5}$, $\eta=\frac{1}{5}$. **2619.** $\xi=\frac{4a}{3\pi}$, $\eta=\frac{4b}{3\pi}$.

2620. $\frac{b^2}{2}+\frac{ab}{2\varepsilon}\arcsin\varepsilon$, gde je ε ekscentricitet elipse.

2621. $\xi=\frac{\pi}{2}$, $\eta=\frac{\pi}{8}$. **2622.** $\frac{\pi}{2}+\frac{4}{5}$. **2623.** $\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{8}$. **2624.** $\frac{3}{20}$.

2625. $\xi=\frac{5}{8}a$, $\eta=0$. **2626.** $\xi=0$, $\eta=a\frac{e^4+4e^2-1}{4e(e^2-1)}$.

2628. $\xi=\pi a$, $\eta=\frac{4}{3}a$. **2629.** $\xi=\pi a$, $\eta=\frac{5}{6}a$.

2630. $\xi=\frac{2}{5}a$, $\eta=\frac{2}{5}a$. **2631.** $\xi=\frac{256a}{315\pi}$, $\eta=\frac{256a}{315\pi}$.

2633. $\xi=\frac{6a(4-\pi^2)}{\pi^3}$, $\eta=\frac{2a(\pi^2-6)}{\pi^2}$.

2634. Težište leži na osi simetrije isečka, na rastojanju $\frac{2}{3}\frac{r\sin\alpha}{\alpha}$ od centra kruga.

2635. $\xi=\frac{5}{6}a$, $\eta=0$. **2636.** $\xi=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi a$, $\eta=0$.

2638. $\xi=-\frac{a}{5}\frac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$, $\eta=\frac{a}{5}\frac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.

2639. $\xi=\frac{4}{5}a$, $\eta=\frac{4}{5}a$. **2640.** $\frac{3}{8}R$.

2641. Težište leži na osi sinetrije na rastojanju $\frac{R}{2}$ od centra.

2642. $\frac{H}{3}$, $\frac{H\sqrt{R^2+H^2}}{3(R+\sqrt{R^2+H^2})}$, $\frac{H}{4}$. **2643.** $\frac{h}{3}$.

2644. $\frac{l}{3}(a+ab+b^2)$. **2645.** $\frac{\pi R^3}{2}=M\frac{R^2}{2}$ (M je masa polukruga).

2646. $\dfrac{\sqrt{(1+e)^3}-2\sqrt{2}}{3}$. 2647. $I_x=\dfrac{256}{15}a^3$; $I_y=16a^3\left(\pi^2-\dfrac{128}{45}\right)$.

2648. $\dfrac{ab^3}{3}$. 2649. 1) $\dfrac{bh^3}{12}$; 2) $\dfrac{bh^3}{4}$; 3) $\dfrac{bh^3}{36}$. 2650. $\dfrac{\pi R^4}{8}$. 2651. $\dfrac{\pi R^4}{2}$.

2652. $\dfrac{\pi}{4}ab^3$ i $\dfrac{\pi}{4}ba^3$. 2653. $\dfrac{1}{2}\pi R^4H$. 2654. $\dfrac{1}{10}\pi R^4H$. 2655. $\dfrac{8}{15}\pi R^5$.

2656. $\dfrac{8}{15}\pi ab^4$, pri čemu je $2a$ dužina ose oko koje se vrši obrtanje.

2657. $\dfrac{1}{6}\pi R^4H$. 2658. $\dfrac{56}{15}$. 2659. 1) $I_x=\dfrac{\pi(e^4-1)}{8}$; 2) $I_y=4\pi(3-e)$.

2660. MR^2, gde je M masa bočne površine cilindra.

2661. $\dfrac{1}{2}MR^2$. 2662. $\dfrac{2}{3}MR^2$. 2663. $\dfrac{9}{2}\pi a^3$. 2664. $6\pi^2ab^2$.

2665. Zapremina je $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2a^3$, površina $6\sqrt{2}\pi a^2$.

2666. Zapremina je $12\pi^3a^3$, površina $32\pi^2a^2$.

2667. Osa obrtanja mora biti ortogonalna na dijagonalu kvadrata; osa obrtanja mora biti ortogonalna na srednju liniju trougla.

2668. $\approx 23{,}7\ m$. 2669. $x_2=x_1+\sin\left(\dfrac{2\pi t^2}{T}+\varphi_0\right)-\sin\left(\dfrac{2\pi t_1}{T}+\varphi_0\right)$.

2670. $\dfrac{kmM}{a(a+l)}$, $\dfrac{a+l}{a}M$, $\dfrac{kmM}{l}\ln\dfrac{r_1(r_2+l)}{r_2(r_1+l)}$. 2671. $\dfrac{2kmM}{\pi r^2}$.

2672. $\dfrac{kmMa}{\sqrt{(R^2+a^2)^3}}=\dfrac{kmM\cos^3\varphi}{a^2}$, pri čemu je φ ugao između pravih koje spajaju tačku C sa centrom prstena i sa bilo kojom tačkom prstena; $\dfrac{kmM}{R}$.

2673. $\dfrac{2kmM}{R^2}\left(1-\dfrac{a}{\sqrt{a^2+R^2}}\right)$. 2674. $2\pi km\sigma$.

2675*. $2\pi km\gamma h\left(1-\dfrac{h}{\sqrt{h^2+(R-r)^2}}\right)=2\pi km\gamma h(1-\cos\alpha)$, pri čemu je α ugao između izvodnice konusa i njegove ose. Iskoristiti rešenje zadatka 2673.

2676. $2km\gamma$.

2678*. $\dfrac{kM^2}{l^2}\ln\dfrac{4}{3}$. Najpre izračunati silu uzajamnog dejstva između elementa ds prvog štapa i drugog štapa (iskoristiti rezultat izveden u zad. 2670), a zatim naći i ukupnu silu uzajamnog dejstva.

2679. $\dfrac{g^2M^3}{6m^2}$. 2680. $\dfrac{\pi H^2d}{12}(R^2+2Rr+3r^2)$.

2681. $\approx 1{,}63\cdot 10^{11}\ kgm$. 2682. $353\,250\ kgm$.

2683. $\frac{\pi d R^2 H^2}{12}$, $\frac{\pi d R^2 H^2}{4}$. Veličina rada u rešenjima zadataka 2683—2686 dobiće se u *kgm* ako se rastojanje uzme u metrima, a specifična težina u kg/m^3.

2684. $\frac{\pi d R^4}{4} \approx 101{,}8\ kgm.$ **2685.** $\frac{\pi d R^2 H^2}{6} \approx 26\,800\ kgm.$

2686. $\frac{4}{15} dab H^2 = 240\ kgm.$ **2687.** $\frac{S l^3 \omega^2 \gamma}{6} \approx 0{,}418\ kgm \approx 4{,}2\ dž.$

2688. $\frac{ab^3 d \gamma \omega^2}{6} \approx 1{,}16\ kgm.$ **2689.** $\frac{ah^3 d \omega^2 \gamma}{24} \approx 0{,}05\ kgm.$

2690. $\frac{ha^3 d \omega^2 \gamma}{60} \approx 0{,}015\ kgm.$ **2691.** $\frac{\pi R^4 H \omega^2 \gamma}{4}$.

2692. $\frac{MR^2 \pi^2 n^2}{3600}$; $\frac{MR^2 (3\pi - 8) \pi n^2}{3600}$.

2693. a) $\frac{ah^2}{6}$; b) dva puta. **2694.** $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$. **2695.** 22,2 *m*.

2696. $\frac{2}{3} da^2 b.$ **2697.** $abd\left(h + \frac{b}{2}\sin\alpha\right)$. **2699.** a) $\frac{d^2 H^2 S}{2} = 32\ kgm.$

b) $\frac{1}{2} SH^2 (1-d)^2 = 2\ kgm.$ **2700.** $\frac{4}{3}\pi R^4$. **2701.** $\approx 0{,}206\ cm^2$.

2702. a) $\approx$ 33,2 sek; b) $\approx$ 64,6 sek. **2703.** $\approx$ 1 čas 6 minuta i 53 sekunde.

2704. $\frac{2bL\sqrt{2a}}{3S\sqrt{g}}(2\sqrt{2} - 1)$. **2705.** $\frac{2b\sqrt{2g}}{3}\left[(H+h)^{\frac{3}{2}} - H^{\frac{3}{2}}\right]$;

za $H = 0$: $\frac{2b\sqrt{2g}}{3} h^{\frac{3}{2}} = \frac{2\sqrt{2g}}{3} S\sqrt{h}$, pri čemu je S površina otvora.

2706. a) $\approx$ 2,4 *sec*; b) $\approx$ 6,3 *sec*; b) $\approx$ 53 *sec*; d) kad $t \to \infty$.

2707. $\approx$ 3,4 *kgm*.

2708. 1a) $\approx$ 7,16 *kgm*; b) $\approx$ 16,6 *kgm*; c) $\approx$ 23.8 *kgm*; 2) pri neograničenom širenju gasa i rad se neograničeno povećava.

2709. $\approx$ 1600 *kgm*. **2710.** $\approx$ 82 minuta. **2711.** Nešto više od 5°.

2712. $\frac{\sigma}{2a\pi\varepsilon_0}$. **2713.** a) $4 \cdot 10^{-6}$ džula; b) $6 \cdot 10^{-6}$ džula; **2714.** 5 *cm*.

2715. $\approx$ 946 kulona. **2716.** $\approx$ 1092 kulona. **2717.** $\approx$ 5110 kulona.

2718. $\frac{E_0^2}{2}$. Efektivni napon naizmenične struje je $\frac{E_0}{\sqrt{2}}$. **2719.** $\frac{E_0 I_0}{2} T \cos\varphi_0$.

2720. $\approx$ 7 *min*. **2721.** $\approx$ 2,915 *l*.

2722. a) $H_1 = H\,\frac{\ln a - \ln c}{\ln a - \ln b} \approx 15\ cm.$ b) $\approx$ 0,125 %. **2723.** $\frac{1}{1024}$ deo početne količine.

2724. $\approx$ 2,49 *g*. **2725.** $\frac{8}{9}\,g$. **2726.** $\approx$ 37,3 minuta.